Enoch Yu

Let a, b, c be positive real numbers such that $a^2+b^2+c^2+(a+b+c)^2 \le 4$. Prove that

$$\frac{ab+1}{(a+b)^2}+\frac{bc+1}{(b+c)^2}+\frac{ca+1}{(c+a)^2}\ge 3.$$

$$a^2+b^2+c^2+a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)\le 4$$

$$a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca\le 2$$

$$\sum_{cyc}\frac{ab+1}{(a+b)^2}\ge 3$$

$$\sum_{cyc}\frac{ab+1}{(a+b)^2}\le\sum_{cyc}\frac{2ab+2}{(a+b)^2}$$

$$\sum_{cyc}\frac{2ab+2}{(a+b)^2}\ge\sum_{cyc}\frac{2ab+a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca}{(a+b)^2}$$

$$\ge\sum_{cyc}\frac{(a+b)^2+(c+a)(c+b)}{(a+b)^2}$$

$$\ge\sum_{cyc}\left(1+\frac{(c+a)(c+b)}{(a+b)^2}\right)\ge 6$$

$$1+\frac{(c+a)(c+b)}{(a+b)^2}+1+\frac{(a+b)(a+c)}{(b+c)^2}+1+\frac{(b+c)(b+a)}{(c+a)^2}\ge 3+3$$

$$\ge 6$$

$$\ge 3+0+0+0$$

$$\sum_{cyc}\frac{2ab+2}{(a+b)^2}\ge 6$$

$$\sum_{cyc}\frac{ab+1}{(a+b)^2}\ge 3$$

$\square$